COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(temps accordé : 4 heures)

(2)

L'objet de ce problème est la recherche de certaines solutions de "l'équation fonctionnelle" $f(x+1) = xf(x)$.

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions f définies sur $]0, +\infty[$ et vérifiant pour tout x de cet intervalle : $f(x+1) = xf(x)$.

I

1°) Soit f un élément de $\mathcal{E}$. Exprimer f(n) en fonction de n et de f(1), n étant un entier non nul.

2°) Montrer qu'il existe une et une seule fonction φ_1 de $\mathcal{E}$ telle que ; $\forall x \in]0, 1]$, $\varphi_1(x) = 1$. Etudier la continuité de φ_1 et donner sa courbe représentative.

On note dans la suite $E_f = \{x \mid x \in]0, +\infty[\ ; \ f(x) = 0\}$

3°) Montrer que si $f \in \mathcal{E}$ et si $y \in E_f$, alors $\forall n \geqslant 0$ $(n \in \mathbb{N})$, $y+n \in E_f$.

4°) Montrer que si f est $\mathcal{C}^p$ (p fois continûment différentiable) sur un intervalle quelconque de longueur strictement supérieure à 1, f est $\mathcal{C}^p$ sur $]0, +\infty[$.

5°) Montrer qu'il existe une et une seule fonction φ_2 de $\mathcal{E}$ telle que $\forall x \in]0,1]$, $\varphi_2(x) = \frac{1}{x}$; étudier la continuité et la dérivabilité de φ_2, donner sa courbe représentative. Existe-t-il des éléments continûment différentiables de $\mathcal{E}$ dont la restriction à $]0,1]$ soit une fonction homographique ?

6°) Trouver les éléments dérivables de $\mathcal{E}$ dont la restriction à $]0,1]$ est un polynôme du 2° degré : donner une idée de leurs courbes représentatives.

7°) Soit $(f,y) \in \mathcal{E}^2$; que peut-on dire de la fonction $x \longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ définie sur $\mathbb{R}_*^+ \setminus E_f$?

II

1°) On définit sur l'intervalle $I =]-1, +\infty[$, la suite de fonctions $u_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$. Montrer que la série $\sum_1^\infty u_n(x)$ converge uniformément sur tout intervalle fermé de I. Expliciter cette somme lorsque $x \in \mathbb{N}$.

2°) Soit pour $x \in I$, $\varphi(x) = \sum_1^\infty u_n(x)$, et soit $[a,b]$ un intervalle fermé de I. Montrer que φ est $\mathcal{C}^\infty$ (infiniment dérivable) et intégrable sur $[a,b]$; lorsque $x \in I$, exprimer $\int_0^x \varphi(t)\,dt$ et $\varphi^{(p)}(x)$ sous forme de séries de fonctions. On justifiera que l'on peut appliquer les théorèmes de dérivation et d'intégration terme à terme des séries de fonctions.

.../...

3°) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}\ (n \neq o)$ et $\forall x \in]-1, +\infty[$,

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \int_o^1 (1-t^x)\, t^{n-1}\, dt.$$

Exprimer $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+x}\right)$ sous la forme $\int_o^1 \ell_1(x,t)\, dt + \int_o^1 t^n\, \ell_2(x,t)$

en justifiant l'existence des intégrales. Montrer que si $x \geqslant o$,

$\lim_{n\infty} \int_o^1 t^n\, l_2(x,t)\, dt = 0$. Vérifier en faisant le changement de variable

$t = u^{\frac{1}{x+1}}$ que ce résultat est prolongeable à $x > -1$.

Conclure que $\varphi(x) = \int_o^1 \frac{1-t^x}{1-t}\, dt$. Calculer $\varphi(\frac{1}{2})$ et vérifier l'expression trouvée pour $\varphi(n)$ $(n \in \mathbb{N})$ au 1°.

4°) Montrer que . $\int_o^1 \varphi(t)\, dt = \lim_{n\infty} \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \right) - \operatorname{Log} n \right)$. On note " γ " la valeur commune de ces expressions ("constante d'Euler"). Montrer que $o < \gamma < 1$.

III

Soit $\mathcal{E}_1$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}$ tel que :

$$\forall f \in \mathcal{E}_1 \begin{cases} f \text{ est } \mathcal{C}^2 \\ \forall x \in]o, \infty[: \begin{cases} f(x) > o \\ \frac{d^2}{dx^2} \{\operatorname{Log}(f(x))\} \geqslant o \end{cases} \end{cases}$$

1°) f étant un élément de $\mathcal{E}_1$, on note g la fonction : $x \longmapsto \frac{f'(x+1)}{f(x+1)}$.

Quel est le domaine de définition de g ? Etablir une relation fonctionnelle vérifiée par g?(ici, une relation entre g(x+1) et g(x)).

2°) Si n et N sont entiers, calculer g(N+n) - g(n), et exprimer g(n) en fonction de g(o). Montrer que $\forall x \in]-1, +\infty[$, $\lim_{\substack{n\infty \\ n \in \mathbb{N}}} [g(x+n) - g(n)] = o$

3°) Etablir que $\forall x \in]1, +\infty[$:

$$g(x+n) - g(n) = g(x) - g(o) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i+x} - \frac{1}{i}\right)$$

En déduire que $g(x) = g(o) + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{x+i}\right) = g(o) + \varphi(x)$

Exprimer g'(n) en fonction de n, n étant un entier non nul

(on rappelle que $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$)

4°) Montrer que

$$\forall f \in \mathcal{E}_1 \; ; \; \text{Log } f(x+1) = x \frac{f'(1)}{f(1)} + \int_0^x \varphi(t)\, dt + \text{Log } f(1).$$

Montrer que toutes les fonctions de $\mathcal{E}_1$ ont même dérivée logarithmique en $x = 1$, et donner sa valeur.

5°) Vérifier que

$$\forall f \in \mathcal{E}_1, \forall x \in]0, \infty[\; ; \; \frac{f(x+1)}{f(1)} = e^{-\gamma x} \prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{e^{\frac{x}{i}}}{1 + \frac{x}{i}} \right)$$

6°) Montrer que cette expression conserve un sens si x décrit

$$\mathbb{R} - \{ -1, -2, \ldots -n, \ldots \}.$$

I V

On définit sur $]0,+\infty[$, la fonction " Γ " par la formule :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt \,. \quad (1)$$

(fonction Eulérienne de 2° espèce).

On admettra que Γ est $\mathcal{C}^{\infty}$ et que ses dérivées successives peuvent s'exprimer par dérivation sous le signe somme de (1) par rapport à x.

1°) Montrer que pour tout entier n positif ou nul, et pour tout réel strictement positif x, l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, (\text{Log } t)^n\, dt$ converge.

Calculer $\Gamma(1)$ et établir une relation entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$.

2°) Montrer à l'aide de l'inégalité de Schwartz que ;

$$\forall x > 0 \; ; \; \Gamma''(x)\, \Gamma(x) \geq \Gamma'^2(x).$$

3°) Déduire du III que $\Gamma'(1) = -\gamma$, et que $\forall x \in]0,+\infty[$,

$$\Gamma(x+1) = e^{-\gamma x} \prod_{i=1}^{\infty} e^{x/i} / (1 + \frac{x}{i}).$$

4°) Exprimer $\Gamma'(n)$ et $\Gamma''(n)$ en fonction de n lorsque n est un entier non nul. Que vaut en particulier $\int_0^{\infty} e^{-t}\, \text{Log}^2 t\, dt$? (On pourra utiliser III-3).

5°) On note $\Psi(x) = \frac{d}{dx} \text{Log } \Gamma(x+1)$.

Montrer que Ψ s'annule une et une seule fois sur $]-1,+\infty[$ et donner un encadrement de son zéro.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail